NOTAS FILOSÓFICAS SOBRE O STATUS ATUAL DA LÓGICA

Prof. Me. Gilson Maicá de Oliveira*
e-mail: filogmaica@gmail.com

Abstract

In this paper, we discuss some aspects of logic in present days. The primary proposal is to show the evolution of this discipline. We begin with a brief introduction where we sketch what we mean by the term "logic". In next section we deal with the complex process of amalgamation between logic and mathematics in the 19th century. Following we explore and discuss what we consider some of the key research areas of current logic. Finally we conclude with some observations about non-classical logics and your philosophical importance. This article is only a didactic exposition, for more details research about development of logic and others aspects, see the references in the end.

Key-words: status of logic, mathematical logic, non-classical logics, and epistemology of logic.

Resumo

Neste artigo, discutimos alguns aspectos da lógica nos dias atuais. O propósito central é mostrar a evolução dessa disciplina. Começamos com uma breve introdução onde especificamos o que queremos dizer com o termo "lógica". Na próxima seção, lidamos com o complexo processo de fusão entre lógica e matemática no século XIX. A seguir, expomos e discutimos o que consideramos algumas das principais áreas de investigação da lógica atual. Finalmente, concluimos com algumas observações sobre lógicas não-clássicas e sua importância filosófica. Este artigo é tão somente uma exposição didática, para uma pesquisa detalhada sobre o desenvolvimento da lógica e outros aspectos, veja as referências ao final.

Palavras-chave: status da lógica, lógica matemática, lógicas não-clássicas, epistemologia da lógica.

*Professor de Lógica do Departamento de Filosofia da Uniandrade-PR.

1 Introdução

> I know what you're thinking about said Tweedledum: but it isn't so, nohow. Contrariwise, continued Twedledee, if it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn't, it ain't. That's logic.
>
> Lewis Carroll, *Trought the looking glass.*

A lógica é uma disciplina que evoluiu enormemente nos últimos dois séculos, e ao que tudo indica continuará a sofrer modificações significativas. Três aspectos devem ser observados na análise do estado atual da lógica, e que contribuiram para este estado de coisas: (1) primeiro, o amalgamento sofrido entre lógica e matemática a partir do século XIX, particularmente pelas contribuições de matemáticos como G. Boole e G. Frege, que propiciaram um aumento significativo de seu escopo teórico; (2) segundo, sua relativização com o surgimento das chamadas lógicas não-clássicas, especialmente aqueles sistemas de lógica que de alguma forma rivalizam com os sistemas clássicos, isto é, as lógicas ditas heterodoxas e, por fim; (3) suas aplicações práticas, tanto na matemática com fora dela, com especial destaque na computação e Inteligência Artificial, sem porém deixar de lado outras áreas como a ciência cognitiva, a linguística, a física e até mesmo a biologia e o direito. Embora, para alguns possa soar estranho, até mesmo a filosofia se beneficiou com o advento da lógica simbólica, ganhando especialmente no rigor de suas investigações e elaborações teóricas. Vamos no que segue discutir brevemente cada um desses aspectos, para melhor caracterizar nosso discurso entorno do estado atual da lógica, mas antes de mais nada, precisamos entender o que queremos dizer quando usamos o vocábulo "lógica", haja vista seu caráter ambíguo e por vezes nebuloso.

De início devemos deixar claro que a palavra 'lógica' é frequentemente usada em diversas acepções. Interessa-nos destacar aqui duas:[1] a lógica como disciplina teórica, e a lógica como sinônimo de *sistema lógico*, designando neste caso um sistema de lógica particular ℓ, ou seja, um sistema de cânones de inferência. Aqui comparece uma das noções centrais da lógica, isto é, a noção de *consequência lógica*. É neste último sentido, como evidenciaremos adiante, que intervem provalmente uma das mais significativas revoluções na história desta disciplina, o surgimento de sistemas não-clássicos.

Usualmente quando nos envolvemos com a caracterização de qualquer disciplina teórica, temos de dar conta de pelo menos dois aspectos: (a) o escopo, objeto ou domínio de investigação da disciplina em foco; (b) o método

[1]Naturalmente, o termo 'lógica' está relacionado ao que aqui discutimos, mas a lógica também é muito mais do que isso, embora não pretendamos esgotar num artigo introdutório, de caráter didático, todas as suas facetas.

atráves do qual a disciplina investiga seu domínio ou objeto. Vamos no que segue discorrer brevemente sobre o escopo da lógica, porém, sem levar a cabo qualquer discussão sobre seu método, o método axiomático, que deixaremos para exposição em outra ocasião. De qualquer forma, o leitor interessado poderá consultar D. Krause [23] e A. Sant'Anna [32].

Uma definição precisa do escopo da lógica (como disciplina) está completamente fora de cogitação pelo menos por duas razões: (1) suas fronteiras com disciplinas correlatas não são suficientemente nítidas, para que se possa delimitar de forma precisa seu campo de atuação. Por exemplo, existem sistemas formais que são por vezes considerados pertencentes ao escopo da lógica e, por vezes, pertencentes à certas áreas da matemática. De fato, embora a matemática e a lógica sejam disciplinas distintas, suas fronteiras, em certa acepção, são atualmente dificeis de mapear. Aliás, a questão de quais sistemas formais são sistemas lógicos é uma questão que estrapola o âmbito próprio da lógica, constituindo-se num problema de filosofia da lógica, que não tencionamos aqui discutir. (2) A lógica, como qualquer outro ramo da ciência está em constante transformação, isto é, não se constitui por um conhecimento acabado, como advogou, por exemplo, Kant,[2] mas que captaliza com frequência novas áreas de investigação. Aliás, podemos dizer que este é um aspecto que torna a lógica uma disciplina viva e fecunda.

Assim, não é possível apresentar uma definição rigorosa e abrangente do que seja a lógica atualmente,[3] haja vista que esta disciplina se constitui numa ciência dinâmica, em constante transformação, e com fronteiras não muito nítidas. Por outro lado, sem muito rigor, podemos dizer afim de qualificar nosso discurso, que a lógica é uma disciplina teórica cujo objetivo é o estudo de certas estruturas abstratas e, sob certo aspecto, não se distingue significativamente de outras disciplinas matemáticas, como a álgebra, a topologia ou a análise. A lógica trata, entre outras coisas, de certas estruturas, os sistemas lógicos, assim como a álgebra trata de outras, como as estruturas de grupo, espaço vetorial e corpo. Alguns textos apresentam a lógica como a ciência que investiga as "formas válidas de inferência". A despeito de tal estudo tenha motivado o aparecimento da lógica como disciplina teórica, não reflete mais o que se tem feito em lógica em nossos dias.[4]

[2]No prefácio da segunda edição de sua *Crítica da Razão Pura*, Kant afirma que a lógica é uma disciplina que desde Aristóteles não pode dar nenhum passo para trás ou para frente, simplesmente por se constituir numa ciência completa e acabada. (cf. Kant [22] p.35)

[3]Para o lógico Elliot Mendelson, a melhor forma de entender uma disciplina, como a lógica, é trabalhar como ela, estudá-la. (cf. Mendelson [25] p.1) Naturalmente, isto requer certo esforço e dedicação por parte do noviço, para uns mais para outros menos.

[4]Quine citando Whitehead em *O Sentido da Nova Lógica* faz a seguinte observação: "A lógica antiga está para a nova lógica, menos como outra ciência anterior, do que como um fragmento pré-científico da mesma disciplina. Nas palavras do próprio Whitehead: 'No

Os desenvolvimentos que se fizeram em lógica a partir do século XIX e, especialmente no século XX, provocaram mudanças radicais e profundas nesta ciência. Em parte, pode-se dizer que isto está associado ao fato de a lógica hodierna possuir uma grande variedade de aplicações, tanto teóricas, como na matemática e em outras ciências; quanto práticas, como na ciência da computação e na inteligência artificial. Assim sendo, a lógica passou a constituir disciplina indispensável a qualquer um que pretenda se dedicar seriamente aos fundamentos da ciência ou à sua filosofia. De um modo geral, podemos afirmar que a lógica possui um duplo aspecto:

a) A lógica "pura", que entendemos como o estudo de certas estruturas abstratas, como as estudadas quando se desenvolve sistemas particulares de lógica, como as lógicas intuicionistas, as lógicas polivalentes, as lógicas paraconsitentes ou as lógicas fuzzy.[5] Ou seja, a lógica "pura"trata do estudo dos sistemas lógicos, das conexões entre eles, de suas vantagens e limitações, sem que se leve em conta, por exemplo, suas possíveis aplicações a outras áreas.

b) A lógica "aplicada", que por seu turno, pode ser dividida em duas esferas: (i) a lógica aplicada às formas válidas de inferência, que por diversas razões, podem ser distintas em áreas distintas de investigação, ou seja, o que é permitido inferir em certos campos do conhecimento, pode não ser em outros. Daí a escolha de um sistema lógico (ou um sistema de canônes de inferência) depender de fatores pragmáticos relativamente ao domínio que se está investigando. Aqui a lógica é útil no desenvolvimento de outros campos do saber, por exemplo, a linguística, a computação, os fundamentos da física ou mesmo a filosofia; (ii) a lógica aplicada as diversas engenharias, no sentido em que ela é útil no incremento de novas tecnologias, como na informática, na robótica, no controle de tráfego aéreo ou na inteligência artificial.

A lógica como disciplina teórica envolve atualmente diversas áreas de investigação, entre as quais a teoria da recursão, teoria de modelos, fundamentos da teoria dos conjuntos, teoria das definições, lógica algébrica, teoria de tipos e teoria da prova.[6] Em cada uma dessas áreas encontram-se problemas lógicos de grande envergadura, como o problema **P&NP** em teoria

---

desenvolvimento moderno da lógica, a lógica aristotélica tradicional apresenta-se como uma simplificação do problema completo que o assunto comporta. Há nisso, uma analogia com a aritmética das tribos primitivas comparada à matemática moderna'". (cf. Quine [31] p. 16)

[5]Nosso objetivo não é apresentar nenhum desses sistemas, mas tão somente situar o leitor a respeito do estado presente da lógica.

[6]O leitor interessado poderá consultar na página do *American Mathematical Society* o link http://www.ams.org/mathscinet/msc/msc2010.html para ter uma ideia mais precisa das áreas da lógica atual.

da recursão, ou a chamada *hipótese do continuum* em teoria dos conjuntos.

De um ponto de vista abstrato, uma *lógica* ℓ (no sentido de sistema lógico), consiste numa estrutura $\ell = \langle \mathcal{F}, \vdash_{\mathcal{F}} \rangle$, onde $\mathcal{F}$ é um conjunto não vazio, dito *domínio* da lógica, cujos elementos são denominados de *fórmulas* e $\vdash_{\mathcal{F}}$ é uma relação sobre $\wp(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$, dita *relação de dedutibilidade* ou *relação de consequência lógica*. Interessa particularmente a caracterização da noção de dedutibilidade, isto é, o que se quer dizer quando se afirma que uma fórmula α é *dedutível* de um conjunto de fórmulas $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}$. O que geralmente escrevemos,

$$\frac{\alpha_1, \ldots \alpha_n}{\alpha}$$

ou mais simplesmente,

$$\Gamma \vdash \alpha.$$

Entre as propriedades do operador $\vdash$ destacam-se as seguintes:

i. Se $\alpha \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \alpha$. (autodedutibilidade)

ii. Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Delta \vdash \alpha$. (monotonicidade)

iii. Se $\Delta \vdash \alpha$ e de $\Gamma \vdash \beta$ para cada $\beta \in \Delta$, então $\Gamma \vdash \alpha$. (regra do corte)

iv. $\Gamma \vdash \alpha$ se existe $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \vdash \alpha$. (compacidade)

A forma como se especifica a noção de dedutibilidade é o que distingue um sistema lógico de outro. Com efeito, fala-se atualmente de uma infinidade de lógicas distintas possíveis.[7] Por exemplo, se ℓ for alguma versão da lógica *clássica*, podemos então admitir como válidas, do ponto de vista dedutivo, diversas formas de redução ao absurdo, por ontro lado, se ℓ é uma lógica *intuicionista*, como a de Brouwer-Heyting, este tipo de dedução não é aceito. Em lógicas *paraconsistentes* o princípio de contradição é abandonado, adimitindo-se teoremas contraditórios sem que isso conduza a trivialização, um fato absolutamente surpreendente, que não foi percebido antes do surgimento deste tipo de lógica.[8] A grande variedade de sistemas lógicos

[7]Conforme Newton da Costa, quando especificamos quais são as formas válidas de inferência de uma lógica ℓ, também estabelecemos aquelas inferências que não são ℓ-válidas que chamamos *ℓ-paralogismos*. Na lógica clássica, que aparentemente é a forma mais próxima de como pensamos racionalmente os fenômenos que nos cercam, distinguimos duas formas de paralogismos: as *falácias* e as *induções*. As falácias são formas de inferência que reconhecemos como errôneas relativamente aos princípios da lógica clássica, as induções, porém, ainda que não sejam dedutivamente válidas, apresentam certo grau de plausibilidade.

[8]Em nossa dissertação *Racionalidade Científica, Paraconsistência e Quase-Verdade*, defendemos a tese de que o advento deste tipo de lógicas amplia a noção de *racionalidade*, haja vista que tradicionalmente muitos filósofos, como Popper, defendiam que o princípio de não-contradição da lógica clássica constituia uma cláusula pétria da noção de racionalidade.(cf. Oliveira [27])

existentes naturalmente interessa tanto ao matemático quanto ao filósofo, e em certo sentido, mesmo ao cientísta aplicado. O que vale apena neste ponto destacar é o aspecto plural dos sistemas dedutivos, o que evidenciamos com a seguinte observação de Restall: "[...] tenho argumentado que não há uma relação única de consequência lógica, mas sim, há diferentes relações de consequência, que formalizam de modo adequado a noção de validade dedutiva. Não há uma lógica verdadeira, mas sim, muitas."(cf. Restall [30] p.163)

Queremos igualmente patentear, que existem diversas maneiras de caracterizar um *sistema de lógica*, e isso depende tanto de fatores epistemológicos quanto pragmáticos. Podemos, por exemplo, ter em mente uma abordagem *linguística* da lógica, ou uma abordagem *algébrica-topológica.*[9] Naturalmente estas diversas formas de tratar os variados sistemas lógicos, revelam em parte a riqueza e a complexidade dessa disciplina presentemente, bem como sua ampla e rica diversidade teórica. Este estado de coisas é em grande medida fruto da aproximação entre lógica e matemática, o que pretendemos discutir com algum detalhe na seção que segue.

2 O amalgamento entre lógica e matemática

> For over two thousand years mathematicians have been making correct inferences of a systematic and intricate sort, and logicians and philosophers have been analysing the caracter of valid arguments. It is, therefore, somewhat surprising that a fully adequate formal theory of inference has been developed only in the last three or four decades.
>
> P. Suppes, *Introduction to Logic.*

Tanto matemáticos quanto filósofos são unanimes em afirma que a lógica como disciplina teórica nasceu com Aristóteles, fundamentalmente com sua teoria sobre o silogismo exposta no *Organon.* Entretanto, a lógica tal como formulada por Aristóteles é limitadíssima, não possuindo grande relevância, a não ser como mera curiosidade histórica. Efetivamente, a silogística aristotélica sequer tem sido tratada, ou mesmo citada numa ampla gama de livros de lógica em nossos dias, particularmente quando se trata de exposições que não são meramente históricas, mas que visão ampliar ou aprofundar os horizontes desta disciplina.

[9]Uma abordagem algébrico-topológica da lógica pode ser encontrada no artigo de Newton da Costa *Abstract Logics.* (cf. da Costa [11])

Atualmente quando se faz referência a lógica clássica, se está falando da lógica matemática, tal como formulada inicialmente por Boole e Frege, e que ganhou sua formulação canônica nos *Principia Mathematica* de B. Russell e Whitehead. Podemos afirmar que a lógica clássica, consiste, grosso modo, no *cálculo de predicados de primeira ordem*, com ou sem igualdade e algumas de suas extensões, como por exemplo certos sistemas de *teoria dos conjuntos* e certos cálculos de prediado de ordem superior (teoria dos tipos). O processo de fusão entre lógica e matemática, teve início com Leibniz no século XVII com sua *Dissertatio de arte combinatoria* publicado em 1666. Leibniz propôs neste trabalho a construção de uma *lingua characteristica universalis*, isto é, uma linguagem simbólica universal que deveria ser uma espécie de estrutura algébrica que espelharia a estrutura comum das diversas linguagens naturais. Leibniz também propôs o a construção de um *calculus rationator*, ou cálculo da razão. Vamos considerar aqui, ainda que sem o devido aprofundamento, algumas transformações da matemática no século XIX, e a evolução da lógica naquele período. Vale notar que "a interação entre a matemática e a lógica é, de fato, a chave para a compreensão da extensa literatura sobre os fundamentos da matemática que existe atualmente."(cf. Kneebone [24] p.3)

De acordo com Hatcher, matemáticos tem historicamente tido diferentes concepções a respeito da natureza da matemática.[10] Alguns, por exemplo, ao considerar a natureza do conhecimento matemático, tendiam a olhar para as ciências empíricas, e em especial para a Física,[11] como fonte dos problemas e construções matemáticas, neste sentido a matemática foi encarada como uma espécie de *ancilla* das ciências empíricas. Outros, porém, deram atenção a intuição matemática, concentrando esforços sobre certas estruturas abstratas como objetos em si mesmos, completamente independentes do mundo fenomênico. (cf. Hatcher [18], p.68) Vale notar, que estes modos de perceber o conhecimento matemático tem com grande probabilidade presença em toda a história desta ciência. Por exemplo, o cálculo foi inventado por Newton, obviamente motivado por um forte sentido de realidade física, ao passo que Leibniz foi, independentemente, orientado por questões de ordem interna da matemática.

[10] No século XIX, e até meados do século XX, a grande maioria dos matemáticos franceses, concebiam a matemática como algo de natureza intuitiva; para eles a matemática era uma espécie de ciência física. Por outro lado, os matemáticos alemães logo se aperceberam, principalmente por influência dos trabalhos de G. Cantor, que a matemática é uma ciência altamente abstrata, o que conduziu a necessidade de uma reconstrução rigorosa de toda a análise matemática, revendo seus fundamentos. Posteriormente isto causou um impacto profundo em toda a história das ciência formais.

[11] Joseph Fourier, por exemplo, era um que considerava que a matemática só teria utilidade na medida em que pudesse prestar algum auxílio à solução de um problema físico.

Em qualquer caso, existem atualmente vários pontos fundamentais sobre os quais a maioria dos matemáticos concordariam, independentemente de suas convicções filosóficas pessoais sobre a natureza da matemática. O primeiro é que a matemática é abstrata, e que consiste principalmente na investigação de certas estruturas.[12] A segunda é que a validade de uma proposição matemática é determinada por um processo de dedução, isto é, da demonstração que uma proposição (teorema) pode ser provada com base em alguns princípios ou suposições admitidas (axiomas). Este processo parece diferir completamente de outras ciências em pelo menos um aspecto: todas as outras ciências, mesmo uma tão abstrata quanto a física, em última análise, depende em certa medida de manipulação do mundo físico. Este processo de distanciamento da matemática das ciências empíricas se manifestou ao longo do século XIX, ganhando força no século XX. Em parte, este dois aspectos da natureza da matemática também são encontrados na lógica atual, o que caracteriza ambas como ciências formais.

O século XIX foi um dos períodos mais profícuos das chamadas ciências formais por diversas razões, entre os quais o descolamento que estas ciências sofreram do mundo fenômenico, isto é, as ciências formais são independentes de considerações empíricas. No caso da lógica, dois fatos contribuiram para que ela alcançasse status de ciência formal: primeiro, sua desvinculação da linguagem natural;[13] segundo, o surgimento de sistemas não-aristotélicos, isto é, sistemas lógicos desvinculados de certa intuição dos objetos físicos que nos cercam.[14] Destacamos nestas notas particularmente três aspectos

[12]Em particular, para o matemático policéfalo N. Bourbaki, a matemática é o estudo de certas estruturas, desempenhando papel fundamental três classes de estruturas básicas, chamadas de estruturas-*mães*, a saber, estruturas *algébricas*, estruturas *topológicas* e estruturas de *ordem*. Intuitivamente, uma estrutura algébrica envolve conjuntos, relações e operações sobre elementos desses conjuntos e, entre elas, poderíamos citar, as estruturas de grupo, corpo e de anel. Uma estrutura de ordem envolveria conjuntos e relações entre os elementos de tais conjuntos de modo a permitir uma certa 'disposição' ou 'hierarquia' entre os mesmos a partir de axiomas da estrutura. São exemplos de propriedades de ordem a reflexividade, a anti-simetria e a transitividade. Entre as estruturas de ordem encontram-se estruturas de ordem parcial, ordem linear, ordem total e de boa-ordem. As estruturas topológicas envolveriam conceitos intuitivos de proximidade entre elementos, limites, vizinhança e continuidade. Alguns autores têm adicionado a estas estruturas-mães, uma quarta categoria de estrutura, as estruturas-*lógicas*. (cf. Béziau [4]).

[13]As linguagens formais, originalmente propostas por Leibniz, passaram efetivamente a fazer parte da lógica com G. Frege. Naturalmente, linguagens formais apresentam grandes vantagens para a lógica, entre as quais elas evitam as vaguidades e ambiguidades comuns das linguagens naturais, além de proporcionar um tratamento mais rigoroso da noção de consequência lógica. Por outro lado, é importante notar que existem atualmente lógicas que discutem os processos de inferência em linguagem natural, que denominamos lógica informal.

[14]Gosenth (cf. Gosenth [15]), por exemplo, considerava a lógica como uma espécie de física do objeto qualquer, isto é, a lógica para ele possuíria um caráter ontológico, seus princípios em certa medida tem alguma vinculação com a forma como percebemos os obje-

que conduziram a este estado de coisas na matemática e na lógica:[15] (a) a aritmetização da análise; (b) o surgimento da teoria dos conjuntos de Cantor e (c) a matematização da lógica. Certamente estes três fatores estão intimamente imbrincados.

O cálculo integral diferencial constitui uma das ferramentas matemáticas mais importantes da história da ciência. Seu desenvolvimento trouxe à matemática, e a ciência em geral, grandes vantagens, porém, de início esta ferramenta estava acentada sobre conceitos imprecisos, como o de *infinitésimo*, que carecia de uma fundamentação lógica rigorosa. Naturalmente os matemáticos tinham conhecimento desse fato, tendo sido muito criticados pelos aspectos contraditórios e vagos do cálculo tal como originalmente concebido. A mais significativa crítica ao cálculo foi dada por George Berkeley em o *Analista*, publicado em 1734. A despeito das críticas, o cálculo sofreu significativos avanços e aplicações, como na engenharia, até que a partir do século XIX muitos matemáticos passaram a sentir a necessidade de estudos fundacionistas, cuja principal verve passou a consistir no estudo rigoroso do cálculo e seus prolongamentos, ou seja, no estudo da *Análise Matemática*. O foco das atenções estava em conceitos como o de função e de número real. Bernhard Bolzano foi um que expressou preocupação com a necessidade de um maior rigor dos conceitos matemáticos, particularmente a necessidade de se evitar o excessivo apelo à intuição e o uso de figuras em demonstrações.

Duas razões podem ser aduzidas para a crença dos matemáticos do século XIX, de que todas as estruturas matemáticas podem ser fundamentadas, em última instânica, na aritmética dos números naturais. Primeiro, os números complexos podem ser definidos a partir dos reais, estes a partir dos racionais, por exemplo, por meio de *cortes de Dedekind* ou *sequências de Cauchy* e, os racionais como razão de dois inteiros e, por fim, os inteiros a partir dos naturais. Segundo, havia se estabelecido uma correspondência entre entidades geométricas (pontos, retas, etc.) e entes numéricos da geometria analítica. Os pontos no plano podem ser caracterizados como pares de números reais, e retas e círculos por suas respectivas equações, e assim por diante. Este fato permitiu transferir o problema da consistência da geometria à consistência da aritmética. A geometria que desde a antiguidade foi considerada como modelo de rigor, estava a partir de então dependendo da aritmética para sua fundamentação.[16]

---

tos do mundo físico. Este é o caso, e.g., do princípio de não-contradição, que em Aristóteles tem carater ontológico, ou seja, um objeto não pode ter e não ter determinada propriedade. Algo semelhante ocorreu com o surgimento das chamadas geometrias não-euclidianas, que segundo alguns autores, serviu de motivação heurística para o desenvolvimentode lógicas não-aristotélicas. (cf. Bachelard [1] cap.5 e Bazhanov [2])

[15] Agrega-se a estes fatores a emergência das geometrias não-euclidianas e a evolução do método axiomático, temas não tratados aqui.

[16] Este fato levou o matemático Leopold Kronecker a célebre afirmação de que Deus

Dentre os matemáticos de pêso que contribuiram decisivamente para a aritmetização da análise estavam Cauchy e Weierstrass. Em especial, a Weierstrass é creditada uma definição rigorosa de limite, que elimina a necessidade do conceito de infinitésimo.[17] Merecem igual atenção as realizações de R. Dedekind. Desde os pitagóricos já se tinha conhecimento de que os números racionais não bastam para a o tratamento de comprimentos em geometria.[18] Nos *Elementos* de Euclides foi provado que a diagonal de um quadrado não é racionalmente proporcional a seu lado. Numa linguagem moderna isso significa que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Uma prova engenhosa, elegante e de simples compreensão desse fato é feita usualmente por *redução ao absurdo*. A descoberta de grandezas *incomensuráveis* contribuiu para a emergência de muitas questões filosóficas em torno da matemática, particularmente em torno do conceito do *contínuo*.[19] É nesta questão particular que Dedekind, e mais tarde G. Cantor, deram as contribuições mais significativas à aritmetização da análise.

Dedekind, no início de sua carreira reconheceu a necessidade de um tratamento adequado para os números reais. Assim, segundo ele próprio, inspirado na teoria das proporções de Eudoxo, estabeleceu a construção dos números reais a partir dos racionais pelo que hoje denominamos *corte de Dedekind*. Dedekind a partir da noção de corte estabelece que os números racionais não constituem um conjunto contínuo, embora seja um conjunto numérico denso.

O estudo da *análise matemática* envolve, noções que desafiaram o pensamento filosófico desde a antiguidade, particularmente os conceitos de *infinito* e *continuidade*, que só passaram a receber tratamento matemático adequado

havia criado os números naturais, e que o resto era obra do homem.

[17] Os infinitésimos, porém, retornam a matemática mais tarde em 1960 com A. Robinson, que desenvolveu a chamada *Análise Não-Standard*. Em português, um trabalho introdutório é '*O Advento da Matemática não-standard*' de A.J. Franco de Oliveira, (cf. Oliveira [29]).

[18] A crença pitagórica de que os números eram a chave para a explicação dos fenômenos foi fortemente abalada pela descoberta dos incomensuráveis, o que segundo alguns autores, constituiu uma primeira manifestação de 'crise' nos fundamentos da matemática. A solução a essa crise foi dada por Eudoxo, ligado à escola de Platão, como sua "teoria das proporções". Esta fato deslocou o interesse dos matemáticos gregos da aritmética para a geometria, o que pode ser ilustrado pela afirmação de Platão de que "Deus geometriza constantemente". O movimento inverso só ocorre no século XIX com a aritmetização da análise, quando a geometria busca fundamentos na aritmética.

[19] A natureza do contínuo está entre as questões mais fundamentais do pensamento filosófico e matemático de todos os tempos, tendo desafiado inúmeros pensadores desde os gregos antigos até os dias atuais. A respeito do contínuo ver, por exemplo, os trabalhos de Hermann Weyl [36] e Mary Tiles [34].

nas mão de G. Cantor, com sua *teoria dos conjuntos*.[20] Segundo Hilbert, a teoria dos conjuntos se constitui no produto mais fino do gênio matemático, e uma das conquistas supremas da atividade intelectual humana,[21] ou ainda, pela afirmação: "ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós". Fraenkel, também admirador da realização de Cantor, observa que: "a conquista do infinito atual pelos métodos da teoria dos conjuntos, pode ser considerada como um expansão do nosso horizonte científico não menos revolucinária do que o sistema de Copérnico em astronomia, a teoria da relatividade, ou mesmo os quanta, na física."(cf. Fraenkel, Op.cit. p. 331)

Cantor, que manteve significativa correspondência com Dedekind, desenvolveu inicialmente sua teoria dos conjuntos motivado por questões de ordem matemática, embora ao longo de seu desenvolvimento teórico, Cantor tenha agregado a sua teoria diversas observações de caráter filosófico e mesmo teológico. As investigações de Cantor sobre conjuntos infinitos começaram a partir do estudo de séries trigonométricas, mas precisamente séries de Fourier, um problema já atacado por outros matemáticos como L. Euler e D. Bernoulli, e que tinha estreita relação como problemas físicos como condução de calor, cordas vibrantes e escoamento de fluidos. No tratamento de questões relacionadas a séries de Fourier, Cantor foi levado pouco a pouco a considerar conjuntos infinitos como totalidades acabadas, fato que contrariava não só a matemática finitista admitida em sua época,[22] mas também toda uma tradição filosófica de pêso, calcada sob a autoridade de pensadores como Aristóteles, Descartes, Leibniz e Kant. Além disso, Cantor também foi acusado de violar princípios religiosos, acusação que o desagradou muito, já que ele tinha profundo interesse em questões religiosas. (cf. Fraenkel, Op.cit. p.3)

No problema do infinito, central na análise matemática, se desenrola todo o drama da teoria dos conjuntos, uma teoria fortemente imbrincada com o desenvolvimento da lógica nos séculos XIX e XX. Em particular, se destaca a emergência de paradoxos nessa teoria, que balançaram em certo

[20] Joseph Dauben, em seu livro *Georg Cantor: his mathematics and philosophy of the infinite*, observa que Cantor é uma das figuras mais imaginativas e controversas da história da matemática. No final do século XIX, suas investigações sobre o continuo e o infinito, forçaram-no a partir para uma interpretação radicalmente distinta da noção de infinito em matemática, o que provocou em muitos matemáticos vigorosa oposição, particularemente Leopold Kronecker considerava Cantor um charatão, um renegado ou "corruptor da juventude".(cf. Dauben [12] p.1)

[21] D. Hilbert, '*On the infinite*'. (cf. Benacerraf [3] p.183-201)

[22] Na matemática, a oposição ao uso do infinito atual, ou '*horror infiniti*', pode ser ilustrada pela célebre afirmação de C. Gauss citada por A. Fraenkel: "Eu protesto ... contra o uso de magnitudes infinitas como algo consumado; tal uso não é admissível em matemática. O infinito é apenas uma *façon de parler*: deve-se ter em mente limites aproximados por certas razões tanto quanto desejado, enquanto outras razões podem crescer indefinidamente."(cf. Fraenkel [13] p. 1)

sentido os fundamentos da matemática, produzindo não só uma rica diversidade de sistemas filosóficos, mas também de soluções matemáticas.

Ao mesmo tempo em que Dedekind trabalhava com o problema do contínuo dos números reais, Cantor trabalhava sobre questões de numerabilidade e não-numerabilidade de conjuntos, que deram origem a noção abstrata de conjunto e as teorias dos números cardinais e ordinais (números "transfinitos"), os primeiros trabalhos que proporcionaram o que podemos chamar uma verdadeira "matemática do infinito".

A concepção de conjunto de Cantor é bastante abrangente e liberal, não fazendo distinção entre os significados dos termos "conjunto", "agregado"ou "coleção". Isso pode ser constatado logo de início pela "definição"de conjunto proposta por Cantor: "Por 'agregado' (*Menge*) entendemos qualquer coleção M de objetos defidos e distintos m de nossa intuição ou nosso pensamento. Esses objetos são chamados de elementos de M."(cf. Cantor [9] p. 85) Para Cantor, qualquer coleção é um conjunto, desde que concebida como uma totalidade acabada e bem definida. Os conjuntos para ele são criações do pensamento, e não entidades do mundo real. De mais a mais, para Cantor não interessa a natureza dos objetos que constituem conjuntos, nem a ordem em que eles se apresentam, nem qualquer outra qualidade. Assim, um conjunto formado como uma totalidade completa e bem definida, pode pertencer a outros conjuntos, o que nos permite construir conjuntos de conjuntos, e conjuntos de conjuntos de conjuntos, e assim por diante.

Cada conjunto constitui um objeto único, determinado por seus elementos, ideia expressa pelo chamado princípio de extensionalidade, segundo o qual dados dois conjuntos x e y, se x e y têm extatamente os mesmos elementos, então x e y são indistinguíveis, são o mesmo conjunto, ou seja, $x = y$. Além disso, ele estabelece uma forma de construir conjuntos, o princípio de abstração, que desempenha papel fundamental na lógica de Frege como veremos adiante. Expresso numa linguagem simbólica este princípio é escrito:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow P(x)).$$

Por volta de 1878, Cantor descobre um modo de 'medir' conjuntos infinitos por meio de bijeções, introduzindo o conceito de *equipotência*.[23] Cantor, então, passou a verificar o 'tamanho' de diversos conjuntos infinitos, o que ele chamou de *cardinalidade*. Ao conjunto dos números naturais ele atribuiu

[23] Diz-se que dois conjuntos x e y são equipotentes se e só se existe uma bijeção entre x e y, o que se escreve $x \sim y$. Observe que $\sim$ é reflexiva, simétrica e transitiva. A ideia da possibilidade de bijeção entre conjuntos infinitos já havia sido notada por Galileu, que estabeleceu uma bijeção entre o conjunto do números naturais e o conjunto dos números pares, mais tarde chamado de paradoxo de Galileu.

a cardinalidade representada pela primeira letra do alfabeto hebraico $\aleph_0$, que é um conjunto dito enumerável, o menor dos números transfinitos.[24] Ele também provou que o conjunto dos números racionais, bem como dos números algébricos, tem a mesma cardinalidade dos naturais, isto é, são conjuntos enumeráveis.

Dando continuidade a suas investigações, Cantor assombrou o mundo matemático e filosófico ao provar, por seu célebre método diagnonal, que o conjunto dos números reais não é enumerável, chamando a cardinalidade dos reais de *cardinalidade do contínuo*, representada por $\mathcal{C}$.[25] Ele também observou que era possível estabelecer uma bijeção entre os pontos de uma superfície e um segmento de reta, o que contraria a intuição: "Eu vejo, mas não acredito", disse ele numa carta a Dedekind datada de 1877 ("Je le vois, mais je ne le crois pas", escrito em francês mesmo).[26] O trabalho de Cantor não parou na cardinalidade do contínuo, mas se estendeu muito além. Ele definiu uma aritmética dos cardinais e estabeleceu as suas propriedades, e ainda arquitetou números transfinitos além de $\aleph_0$. Na verdade Cantor patenteou uma correspondência entre números ordinais e cardinais, que permite determinar os cardinais a partir dos ordinais. Dessa maneira, ele provou que o sucessor imediato de $\aleph_0$ é $\aleph_1$ e seu sucessor imediato é $\aleph_2$ e assim por diante.

Naturalmente, uma questão importante aqui é qual seria a posição do contínuo na escala infinita dos cardinais. Esta questão é respondida pela famosa hipótese do contínuo, segundo a qual $\aleph_1 = \mathcal{C}$, ou equivalentemente $2^{\aleph_0}$.[27] Cantor procurou sem sucesso estabelecer uma demonstração desta conjectura, que representa um dos grandes problemas em aberto da matemática moderna. Vale resaltar ainda, que a teoria do infinito de Cantor estabeleceu uma distinção muito clara entre a matemática e outras ciências, particularmente a física com a qual era amiúde confundida. É certo que não há qualquer indicação de que existem conjuntos infinitos de objetos físicos. Mesmo um conjunto como o conjunto de todos os átomos do universo, embora extremamente grande, ainda possui um número finito de elementos.

Não se pode por em dúvida, que na matemática contemporânea o conceito de conjunto desempenha um papel central. Muitos trabalhos sobre

[24] A escolha por Cantor da letra $\aleph$ do alfabeto hebraico não é causual, haja vista que uma das formas de designar a divindade na Torá começa com essa letra. Adonai em hebraico significa o Senhor.

[25] Intuitivamente, esta prova é igualmente uma demonstração indireta da existência de números transcendentes, haja vista que se os reais não são contáveis e se os algébricos o são, então existem reais não algébricos (não enumeráveis), isto é, transcendentes. Assim, verifica-se que exitem muito mais números transcendentes do que algébricos.

[26] cf. Krause [23] p. 72.

[27] Observação: para todo conjunto x, o cardinal das partes de x é superior ao cardinal de x e igual a $2^{card(x)}$. Assim, o cardinal das partes de $\aleph_0$ é $2^{\aleph_0}$.

fundamentos da matemática reconhecem que praticamente todos os objetos matemáticos, como números, funções e relações, podem ser definidos como conjuntos. Além disso, muitas construções importantes da matemática podem ser vistas como conjuntos munidos de estrutura.[28] Como corolário disso, podemos afirmar que a história da matemática do século XX esteve em grande medida balizada em torno da discussão sobre o papel da teoria dos conjuntos nos fundamentos da matemática. Como veremos na sequência, a ausência de acordo geral sobre os fundamentos da matemática, também faz parte do cenário epistemológico da matemática desse período, isso em parte devido a crise nos fundamentos da matemática provocada por contradições descobertas no que podemos denominar sistema Cantor-Frege.

Ao mesmo tempo em que os matemáticos se preocupavam com a aritmetização da análise, a lógica passou a ganhar status de ciência independente da filosofia, adquirindo com o tempo a denominação, perfeitamente justificada, de lógica matemática.[29] Esta lógica apresentou-se de início sob duas formas: a primeira, pelas mãos de G. Boole, que lhe deu feições algébricas; a segunda, sem contrariar a primeira, concebida por G. Frege, que lhe imprimirá um caráter linguístico.

De início, foi o autodidata G. Boole que em 1847 deu sequência as ideias de Leibniz sobre a possibilidade de matematizar a lógica. Segundo ele, a lógica nada tem haver com a filosofia. Boole afirma: "não devemos continuar a associar a lógica à metafísica, mas às matemáticas [...], tal como a geometria, a lógica repousa sobre verdades axiomáticas, e seus teoremas são construídos segundo a teoria geral do simbolismo que constitui o fundamento daquilo que é reconhecido como a análise."(cf. Boole [8] p.13) Assim, Boole empreende uma renovação completa na forma de entender a lógica, o que influenciou decisivamente as pesquisas posteriores.

Embora a álgebra de Boole representasse enorme progresso relativamente a silogística aristotélica, jamais chegou perto de atingir por completo seu objetivo, isto é, um sistema capaz de envolver toda e qualquer forma de racicínio dedutivo. Por outro lado, o ambicioso programa de G. Frege era o de estabelecer uma notação simbólica e um conjunto de regras que fosse adequadas para todas as demonstrações dedutivas – e, em particular, para

[28]É importante notar aqui a perspectiva conjuntista não é a única capaz de fundamentar a matemática atual. Por exemplo, a teoria das categorias, desenvolvida por Eilenberg e MacLane em 1945, também pode ser usada para fundamentar a matemática presentemente.

[29]Segundo R. Blanché, "um dos traços que marcam a lógica do início do nosso século [século XX], e que está longe de ser apagado, não é pois somente, de uma maneira geral, a sua íntima associação com a matemática, mas, mais precisamente, a sua subordinação, na sua qualidade de indispensável auxiliar, ao problema do fundamento dessa ciência."(cf. Blanché [6] p. 306).

a análise das demonstrações matemáticas. Em outras palavras, Frege pretendia constituir uma "grande lógica", que serviria como fundamento para todo o conhecimento matemático. Para ele, toda matemática nada mais era do que lógica disfarçada, o que assombrou muitos matemáticos, haja vista que esta era encarada por muitos como uma imensa tautologia.

Foram, portanto, os trabalhos de Frege que tornaram a lógica uma ciência formal. Frege era um grande admirador da obra de Cantor, e se utilizou do chamado princípio de abstração cantoriano para elaborar sua lógica. Seu trabalho mais importante, *Begriffsschrift* (ideografia ou "escrita conceitual"), redigida em 1879, contém cerca de 80 páginas, e é considerada por muitos a mais importante obra de lógica desde Aristóteles. A *Begriffsschrift* continha o sistema lógico fregeano; sua análise lógica da matemática foi concluida anos mais tarde com a publicação do primeiro volume dos *Grundgesetze der Arithmetik* (1893-1903). Porém, antes da publicação de seu segundo volume, o sistema fregeano se revelaria contraditório devido a utilização do princípio de abstração tal como apresentado por Cantor.

Assim, apesar dos sucessos estabelecidos, a teoria dos conjuntos de Cantor apresentava problemas. Era uma teoria *intuitiva*, não axiomatizada. O matemático Paul Halmos, usa a expressão 'naive' – ingênua – para designar a abordagem de Cantor.

Uma consequência importante do princípio de abstração é o conhecido paradoxo de Russell, assim chamado em homenagem ao seu descobridor, o filósofo e matemático Bertrand Russell.[30] Seja $\mathfrak{R}$ o conjunto de todos os conjuntos que não contêm a si mesmo como membros. Então

$$x \in \mathfrak{R} \leftrightarrow x \notin x$$

ou ainda,

$$\mathfrak{R} = \{x : x \notin x\}$$

A questão que imediatamente decorre e a seguinte: $\mathfrak{R}$ pertence ou não pertence a sim mesmo? Naturalmente, se $\mathfrak{R} \notin \mathfrak{R}$, então, pela definição acima, $\mathfrak{R} \in \mathfrak{R}$. Mas, neste caso, se $\mathfrak{R} \in \mathfrak{R}$, então, pela definição de $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R} \notin \mathfrak{R}$. Em todo caso, o problema no leva a uma contradição. Ao interpretarmos tal resultado, somos levando a crer que existe algo, além de $\mathfrak{R}$, que não pertence

[30]Na verdade, o paradoxo de Russell era apenas um dos muitos paradoxos, que começaram a pipocar na teoria dos conjuntos na virada do século, o próprio Cantor já havia descoberto um paradoxo em sua teoria relativa a classe de todos os cardinais. Ramsey observou que os paradoxos eram essencialmente de dois tipos, os paradoxos que envolvem noções diretamente associadas a linguagem da teoria dos conjuntos, chamados paradoxos lógicos, e os paradoxos semânticos, que envolvem noções como as de 'verdade' e 'definibilidade'. (cf. Hatcher, Op.cit. p.102)

a si próprio. Se admitirmos que o conjunto $\mathfrak{R}$ representa nosso universo, chegamos a conclusão de que sempre existirá algo além de nosso universo, isto é, não há universo, na medida em que não é possível representar o absoluto. O Paradoxo de Russell parece nos conduzir a conclusão de que o universo absoluto não pode ser expresso mediante estruturas matemáticas convencionais. Vale apena reproduzir um trecho de uma carta de Frege a Russell, que expressa a crise sobre os fundamentos fregeanos da matemática provocado pelo paradoxo de Russell:

> Caro Colega
> Muito obrigado pela sua interessante carta de 16 de Junho. [...] Sua descoberta da contradição causou-me enorme surpresa, e gostaria de dizer quase uma consternação, desde que ela abalou as bases sobre as quais eu tencionava construir a aritmética. Parece, então, que [...] minha regra V [o princípio supra citado] é falsa, e que minhas explicações dadas no § 31 não são suficientes para assegurar que minhas combinações de sinais tenham um significado em todos os casos. Eu devo refletir mais sobre o assunto. Isto é por demais sério, pois com a perda de minha regra V, não somente a fundamentação de minha aritmética, mas também a única fundamentação possível da aritmética, parece desvanecer."[31]

A relevância dos paradoxos lógicos para os fundamentos da matemática estava no fato de atacarem a conexão que Frege e Cantor haviam pretendido estabelecer entre lógica e matemática; em outras palavras, entrava em crise a possibilidade de definir por meio de uma linguagem formal e alguns poucos princípios puramente lógicos, sem referência a fatos externos, os conceitos matemáticos fundamentais. As posturas filosóficas que emergiram no cenário matemático do século XX procuravam, entre outras coisas, responder aos desafios impostos pelos paradoxos, particularmente a duas questões de fundo: que relações existem entre lógica e matemática? E, que sentido se pode dizer que a matemática é uma ciência rigorosa? Relacionada a esta última questão está a seguinte observação de Hilbert:"Se não podemos encontrar certeza e rigor na matemática onde poderemos encontrar?"

Três posturas filosóficas se destacam nesse cenário: o logicismo, o formalismo e o intuicionismo.[32] O ideal logicista, iniciado com Frege, foi mantido com B. Russell que propôs uma solução aos paradoxos pelo estabelecimento de sua teoria de tipos. Por outro lado, o ideal formalista, defendido por Hilbert, tem continuidade com a axiomatização da teoria dos conjuntos le-

[31]O trecho aqui reproduzido foi citado por Décio Krause em [23] p.97.

[32]Não tanto por conta dos paradoxos descobertos na teoria dos conjuntos, mas também por causa de uma desconfiança fundamental em relação ao infinito em matemática, uma série de matemáticos adotaram uma postura usualmente denominada de intuicionismo. Brouwer, Poincaré, Kronecker, e Weyl são alguns dos matemáticos que adotaram esta postura.

vado a cabo inicialmente por Zermelo. A ideia central da axiomatização da teoria dos conjuntos encontra-se resumida no seguinte trecho de Zermelo:

> "A teoria dos conjuntos é o ramo da matemática cujo objetivo é investigar matematicamente os conceitos de *número*, de *ordem* e de *função*, em sua simplicidade primeira e assim desenvolver os fundamentos da aritmética e de toda a análise; e isso constitui, consequentemente, um componente indispensável da ciência matemática. No presente, todavia, a existência dessa disciplina parece ameaçada por certas contradições ou 'antinomias', que podem ser derivadas de seus princípios – em aparência essenciais ao nosso pensamento –, e que até agora não encontraram solução inteiramente satisfatória. Em particular, em virtude da antinomia de Russell, [...] não parece permitido hoje atribuir a qualquer conceito arbitrário, logicamente definido, um conjunto ou uma classe como sua extensão. Em decorrência, a definição original de Cantor de conjunto como 'uma coleção de objetos definidos e distintos de nossa intuição ou de nosso pensamento, reunidos em um todo', certamente requer alguma limitação, embora ninguém até agora tenha tido sucesso em substituí-la por outra definição, igualmente simples, que não esteja exposta a dúvidas. Nestas circunstâncias não temos nenhuma outra alternativa a não ser tentar o caminho inverso e, partindo da teoria dos conjuntos historicamente existente, procurar os princípios que são requiridos como base para essa teoria matemática. Este problema deve ser resolvido de tal modo que os princípios sejam suficientemente restritos para excluir contradições, e ainda convenientemente amplos para conservar tudo o que possui valor na teoria em apreço". (Kneebone [24] p.287.)

É neste contexto que surgem sistemas axiomáticos como ZFC, NBG e NF, que embora não sejam todos equivalentes entre si, geram praticamente a mesma classe de matemática: toda a matemática tradicional pode ser neles reconhecida.[33] Sabe-se, entretanto, que apesar de tais sistemas evitarem certos paradoxos, como o de Russell, não há garantias de sua consistência, i.e., que são inteiramente livres de contradições. Além disso, tem-se reconhecido que a demonstração de uma contradição em qualquer um desses sistemas conduz a falência de todos os demais.[34] Por outro lado, estes

[33]Devido a Gödel e Cohen, entre outros, verificou-se que se pode construir teorias de conjuntos divergentes de ZFC, teorias em que o axioma da escolha não é válido, e teorias em que certas proposições importantes, como a hipótese do contínuo, podem não ser admitidas. Teorias que derrogam o axioma da escolha ou outro princípio da teoria de conjuntos tradicional são chamadas de não-cantorianas. Vale notar que uma matemática que se fundamenta sobre teorias de conjuntos não cantorianas pode divergir completamente da matemática tradicional. Assim, podemos chamar tais matemáticas de não-cantorianas.

[34]Note que tanto as matemáticas catorianas, quanto as não-cantorianas estão em última instância alicerçadas sobre a lógica clássica. Pode-se, contudo, construir teorias de conjun-

sistemas tem sido estudados exaustivamente por décadas sem que se tenha até o presente momento descoberto qualquer contradição. Contudo, de fato existe uma verdadeira barreira conceitual à possibilidade de se provar que uma contradição jamais será descoberta. Isto foi demonstrado por K. Gödel, por volta de 1930, que constatou que qualquer prova de consistência de um sistema axiomático de conjuntos, dependeria de princípios cuja própria consistência não seria mais evidente que os próprios princípios do sistema axiomático em foco. Em década anterior aos trabalhos de Gödel, um grupo de matemáticos liderados por D. Hilbert, procurou estabelecer a consistência da aritmética e da matemática em geral recorrendo apenas a métodos finitários. Gödel demonstrou que tais métodos jamais poderiam estabelecer a consistência de qualquer sistema que fosse suficientemente poderoso para tratar com a aritmética dos números inteiros. Esta descoberta é usualmente vista como uma das mais significativas descobertas da matemática do século XX. Seu impacto sobre o programa formalista de Hilbert foi devastador, embora muitos matemáticos e filósofos tenham a visto como uma demonstração da natureza criativa do pensamento matemático.

Assim sendo, dado o fato de não parecer haver uma demonstração absoluta de não contradição em sistemas como o de ZFC e NBG, não há justificativa aceitável de natureza epistemológica para a crença de que a matemática não envolva contradições.

Considerando o que dissemos até aqui, cabe a questão: qual sistema axiomático de conjuntos melhor representa a matemática? Podemos dizer que a escolha entre, por exemplo, ZFC e NBG ou qualquer outro, é uma questão de gosto filosófico, além de alguma necessidade prática do matemático. Usualmente o sistema ZFC tem sido preferido, gozando de grande popularidade. Efetivamente, a coleção de todos os conjuntos não tem sido objeto de preocupação para uma grande parcela de matemáticos. Na verdade, os conjuntos utilizados na matemática tradicional podem ser obtidos a partir de um fragmento de ZFC. Só muito recentemente, com o advento da teoria da categoria que uma verdadeira necessidade surgiu entre matemáticos em lidar com grandes coleções. Esta necessidade foi suprida de modo mais flexível pela dicotomia classes-conjunto, que assentua um papel mais significativo para a formulação de NBG e sistemas ainda mais fortes.(cf. Goldblatt [14] p. 13) Um corolário que pode ser tirado de nossas observações é que não existe uma única forma de fazer teoria dos conjuntos, e portanto, de estabelecer um fundamento conjuntista para a matemática.

---

tos cuja lógica subjacente não é classica, como teorias de conjuntos paraconsistentes em que contradições são admitidas sem os disabores da trivialidade. A partir disso constroem-se matemáticas paraconsistentes, que divergem radicalmente da matemática tradicional.

O equacionamento da matemática em termos conjuntistas pode, com alguma justificativa, ser vista como uma síntese das investigações matemáticas do último século. Paul Cohen, cujo trabalho sobre a independência da hipótese do contínuo, conduziu a uma verdadeira explosão de atividade teórica conjuntista chegou a afirmar:"Ao analisar os argumentos matemáticos, os lógicos se convenceram de que a noção de conjunto é o conceito mais fundamental da matemática".(cf. Goldblatt [14] p. 15) O advento da teoria de categorias, porém, alterou o cenário descrito pela afirmação de Cohen. Não há dúvida de que a linguagem conjuntista continuará a desempenhar um papel relevante sobre os fundamentos da matemática, contudo, não constitui a única forma de fundamentar a matemática. Na verdade advogamos a existência de múltiplas perspectivas sobre os fundamentos da matemática e, portanto, a possibilidade de diversas ontologias matemáticas, esta nossa hipótese, porém, não será discutida aqui, mas em outra oportunidade.

3 Três áreas da lógica: teoria de modelos, teoria da recursão e lógica algébrica

3.1 A teoria de Modelos

A teoria de modelos é o estudo das relações entre linguagem e o mundo, ou mais precisamente entre linguagens formais e interpretações de linguagens formais. A teoria de modelos em seu estágio atual de desenvolvimento é devida aos trabalhos seminais de A. Tarski e A. Robinson na década de 1950. Dentre as contribuições mais significativas da teoria de modelos está a matematização, feita por Tarski, do conceito de verdade. Os trabalhos de Tarski permitem falar da noção de verdade de forma rigorosa, isto é, matemática.

Outro tema de interesse da teoria de modelos e a relação entre consistência, completude e correção de teorias formais. Usualmente tem-se a ideia de que um aparato dedutivo para uma dada linguagem formal (interpretada) deve cumprir a seguinte condição fundamental: se uma sentença é deduzida de um determinado conjunto de sentenças, então esta sentença é verdadeira em todos os modelos dessa teoria. Diz-se, neste caso, que o aparato dedutivo é correto para a semântica em foco. De fato, esta é uma forma de dizer que as deduções preservam a verdade. Uma questão básica aqui é a seguinte: teorias consistentes sempre possuem modelo? Embora isto seja desejável, não ocorre em todos os casos. Quando ocorre de uma teoria consistente possuir modelo, dizemos que ela é completa, por exemplo, o cálculo de predicados de primeira ordem é completo, o mesmo ocorre com a cálculo proposicional, a lógica intuicionista e diversos sistemas de lógica modal. Porém, este fato não se verifica para a lógica de segunda ordem e em geral para lógicas de ordem superior. Dito de outra forma: nas teorias formais usuais (fortes) e consistentes, os conceitos de sentença verdadeira e sentença demonstrável (teorema) jamais coincidem, o primeiro sendo mais abrangente que o segundo.

Na teoria de modelos também se estudam as propriedades de Löwenheim-Skolem e da compacidade. A primeira propriedade diz que se uma teoria possui modelo, então tem um modelo cujo domínio é finito ou numerável. Por compacidade deve-se entender que se todo subjconjunto finito de sentenças de dada teoria formal tem um modelo, então a teoria tem modelo. É importante notar que estas propriedades fazem parte do escopo do cálculo de predicados.

A teoria de modelos possui as mais diversas aplicações, tanto na matemática pura quanto na filosofia. Particularmente se destacam suas aplicações na filosofia da ciência e na teoria do conhecimento, em particular a teoria da verdade de Tarski, e outras teorias formalizadas da verdade, como a teoria da quase-verdade do brasileiro Newton da Costa.

3.2 A teoria da Recursão

Em poucas palavras, a teoria da recursão trata do que é exequível mecânicamente, computacionalmente, isto é, sem recurso à inteligência humana. Em certa acepção é uma teoria geral das máquinas, que atuam de forma mecânica, sempre na dependência de comandos. Esta teoria estuda certas máquinas ideais introduzidas por Alan Turing. Entre as questões típicas dessa teoria está a das funções recursivas. Todos os computadores atualmentente construidos são realizações físicas das máquinas de Turing. Quando os primeiros computadores começaram a ser construídos, por volta de 1950, com John Von Neumann e seu grupo, a teoria geral das máquinas já existia, pois Turing, e independentemente Post, já haviam estabelecido suas bases em 1936. Alan Turing, por volta de 1935, quando ainda era estudante do *King's College*, em Cambridge, propos solucionar o chamado problema da decisão (*Entscheidurngsproblem*) proposto originalmente por Hilbert. Este problema consiste em indagar se existe um procedimento efetivo (mecânico) para determinar se todos os enunciados matemáticos verdadeiros podem ou não ser provados.

Num sentido preciso, uma máquina de Turing é um modelo abstrato de um computador, que se restringe apenas aos aspectos lógicos do seu funcionamento (memória, estados e transições) e não à sua implementação física. Numa máquina de Turing pode-se modelar qualquer computador digital.

Na teoria da recursão, um dos resultados mais importantes está o teorema de Church-Turing, segundo o qual, para a aritmética tradicional, suposta consistente, não existe uma máquina de Turing capaz de provar todos os seus teoremas e somente eles. Como corolário desse fato, concluimos que a atividade humana é indispensável para o desenvolvimento do conhecimento matemático.

3.3 Lógica algébrica

Nesta área da lógica usam-se métodos algébricos para tratar de sistemas lógicos. O tratamento algébrico da lógica tem em Leibniz um dos precursores, contudo, foi com De Moragan e Boole, em meados do século XIX, que uma perspectiva algébrica da lógica ganhou fôlego. Podemos afinçar, de qualquer forma, que o grande desenvolvimento da lógica algébrica veio a ocorrer com os trabalhos de Alfred Tarski e Paul Halmos. Vale lembrar que esta forma de tratar os sistemas lógicos é a abordagem preferida da chamada escola polonesa de lógica, de grande influência nesta área. Um exemplo típico desta perspectiva em lógica é a abordagem algébrica do cálculo proposicional clássico, dada pelo que chamamos álgebra de boole. Em certo sentido, trabalhar com o cálculo proposicional nada mais é do que trabalhar com uma álgebra de boole.

De um modo geral, as estruturas algébricas que comparecem na lógica clássica resultam do processo de passagem ao quociente: tem-se um sistema lógico, escolhe-se uma relação de equivalência conveniente, isto é, compatível com as noções lógicas básicas e passa-se ao quociente, obtendo-se desse modo a estrutura que algebriza o sistema. Desse modo, por exemplo, mostra-se que a álgebra de Boole e a álgebra de Heiting[35] constituem algebrizações, do cálculo proposicional clássico e do cálculo proposicional intuicionista respectivamente.

O método proposto acima para a algebrização do cálculo proposicional clássico e intuicionista, porém, não se presta a todos os casos, por exemplo, muitos sistemas de lógicas não-clássicas, como o cálculo paraconsistente, não pode ser algebrizado por esse método, haja vista que neste sistema lógico não há nenhuma relação de congruência significativa. Além disso, mesmo no quadro clássico, a passagem ao quociente não permite tratar 'algebricamente' determinados conceitos lógicos, como os tableaux de Smullyan. Nestes casos, a utilização de pré-álgebras torna-se significativo: primeiro quando não há uma relação de congruência, ou quando a relação de equivalência estabelecida não é compatível com todas as operações lógicas; segundo, em casos em que, mesmo dispondo de uma congruência, não se deseja passar o quociente para não ocultar fatos significativos desses sistema lógico. No primeiro

[35]Uma exposição elementar desses sistemas encontra-se em [26].

caso temos estruturas que denominamos álgebras de Curry,[36] introduzidas por Newton da Costa afim de sistematizar uma teoria geral da algebrização dos sistemas lógicos; no segundo, lançamos mão de pré-álgebras no sentido usual deste termo.

4 As lógicas não-clássicas

> I can't belive THAT! Said Alice.
> Can't you? The Queen said a pitying tone. Try again: draw a long breath, and shut your eyes. Alice laughed. There's no use trying, she said one CAN'T belive impossible things.
> I daresay you haven't hat much practice, said the Queen. When I was your age, I always did it for half-an-hour a day. Why, sometimes I've belived as many as six impossible things before breakfast.
>
> Lewis Carroll, *Trought the looking glass.*

Não constitui nenhum exagero, afirmar que o surgimento das lógicas não-clássicas, representa uma das revoluções conceituais mais significativas de nosso tempo. Uma apresentação, classificação e avaliação do status desses sistemas de lógica, implicaria necessariamente um esforço hercúleo, que demandaria um trabalho bem mais extenso, dada a amplitude, multiplicidade e profundidade de tais lógicas. Assim sendo, nos propomos aqui um esquema sumário, com alguma discussão epistemológica em torno de sua relevância filosófica.

O racicínio dedutivo não se enquadra, completamente, na lógica elementar clássica. Na matemática, por exemplo, tem-se necessidade de recursos lógicos mais potentes. Como já observamos, sistemas de lógica não elementar esbarram com um obstáculo extremamente difícil de ser superado: os paradoxos lógicos. No âmbito clássico, é possível reforçar a lógica elementar por duas vias distintas: pela teoria de conjuntos axiomatizada, ou pelo cálculo de predicados de ordem superior (teoria de tipos).[37] Efetivamente, estes sistemas de lógica não resolvem, *stricto sensu*, o problema dos paradoxos; tão-somente em tais sistemas aparentemente não resurgem, em virtude de se recorrer a expedientes *ad hoc* para contorná-los. Além disso, deve-se ter em mente que as limitações da lógica elementar não advém tão somente do fato de seu aparato dedutivo não dar conta da matemática usual, mas

[36] Certas estruturas receberam o nome do lógico norte-americano H.B. Curry, porque foi ele um dos primeiros a defender o uso sistemátcio de pré-álgebras no domínio da lógica.
[37] cf. da Costa [10] p.68.

também que se pode construir sistemas dedutivos divergentes entre si, o que nos leva a admitir que não há um conceito único e definitivo de consequência lógica. A possibilidade de eregir sistemas lógicos mais fortes, do ponto de vista sintático ou dedutivo, ou de sistemas que divergem do clássico em sua semântica ou estrutura dedutiva, foi o ponto de partida para a construção do que denominamos lógicas não-clássicas, que em certo sentido, podem ou completar a lógica clássica, o que denominamos de lógicas não-clássicas ortodoxas, ou rivalizar com ela, as chamadas lógicas não-clássicas heterodoxas.

Existem atualmente muitos sistemas lógicos e, desde o surgimento do aparato lógico 'clássico' tem-se defendido a necessidade de melhorá-lo, modificá-lo, ou até mesmo substituí-lo por sistemas mais potentes, ou que deem conta de aspectos do processo dedutivo que aquele ignora. Um exemplo típico disso pode ser tirado dos debates em torno do condicional material. Proposto de início pelos estóicos, a 'implicação material' foi formalizada por Frege (1879) e Russell & Whitehead (1910), e provida de uma semântica por Post (1921) e Wittgenstein (1922). Porém, já McColl em 1880 defendia a necessidade de um condicional mais estrito; a 'implicação estrita' formalizada por Lewis (1918). Posteriormente, novos debates em torno da implicação estrita, deram origem a 'implicação relevante' e a lógica relevante.(cf. Haack [16] p.207)

Apresentar uma distinção clara entre lógicas clássicas e lógicas não-clássicas não constituir tarefa fácil, pode-se delinear, de qualquer forma, alguns critérios de ordem didática que nos forneçam alguma visibilidade sobre o assunto. De fato, é possível afirmar que as lógicas não-clássicas divergem das lógicas clássicas,[38] em maior ou menor grau, em um ou mais dos seguintes aspectos: sintático, dedutivo ou semântico. Vamos apresentar uma distinção entre lógicas não-classicas e lógicas clássicas, tendo em mente estes aspectos.

Assim sendo, diremos que um sistema lógico ℓ é não-clássico relativamente a um sistema clássico, se e só se cumpre um ou mais dos seguintes requisitos:

I. ℓ possui uma linguagem mais rica em capacidade de expressão, per-

[38]Devemos ter em conta que não há uma lógica clássica, mas muitos sistemas clássicos, como o cálculo proposicional clássico, o cálculo de predicados (como ou sem igualdade), disversos sistemas de ordem superior (teoria de tipos), e até mesmo diversos sistemas de teoria de conjuntos, que em certo sentido também são sistemas lógicos. Efetivamente, mesmo uma caracterização do que seria um sistema 'clássico' constitui um empreendimento díficil de equacionar com precisão. De qualquer modo, vale lembrar que tornou-se quase lugar comum entre os lógicos admitir como um sistema clássico qualquer sistema dedutivo que se assemelhe ao que Russell e Whitehead propuseram em sua obra monumental *Principia Mathematica*.

mitindo que se trate de conceitos que não são formalizáveis no escopo de um sistema lógico clássico. Podemos arrolar como exemplos neste caso os sistemas de lógica modal alética, em que se introduzem os conceitos de necessidade $\Box$ e possibilidade $\Diamond$; e os sistema de lógica deôntica, em que comparecem os operadores obrigatório $\mathscr{O}$ e permitido $\mathscr{P}$. Outros exemplos são a lógica temporal ou cronológica, cultivada por A.N. Prior e a lógica epistêmica desenvolvida principalmente por Lewis (1912) e continuada por S. Kripke.

II. ℓ possui uma semântica distinta dos sistemas lógicos clássicos, isto é, ℓ é um sistema fundado em teorias de conjuntos distintas das usuais. Nas lógicas paracompletas, por exemplo, não é válido o princípio de terceiro excluído, o que permite uma semântica distinta da semântica clássica. Particularmente em lógicas polivalentes de J. Łukasiewicz e E.L. Post, uma proposição pode assumir outros valores de verdade entre 1 (verdadeiro) e o 0 (falso). Na esteira dos sistemas polivalentes, desenvolveram-se as lógicas difusas (fuzzy), cujo principal expoente foi o matemático iraniano L.A. Zadeh. Também a lógica intuicionista de Brower-Heiting admite uma semântica distinta da semântica clássica.

III. ℓ diverge dos sistemas clássicos por derrogar um ou mais princípios clássicos. Entre estes princípios clássicos temos, por exemplo, o princípio de identidade, de não-contradição e terceiro excluído. Vale lembrar, que embora estes princípios sejam os mais citados na literatura, não são os únicos que alicerçam os sistemas clássicos. As lógicas que derrogam tais princípios são usualmente chamadas de lógicas heterodoxas, entre elas encontram-se as lógicas não-reflexivas, em particular as lógicas de Schrödinger, que derrogam o princípio de identidade; as lógicas paraconsistentes que abandonam o princípio de não-contradição e as lógicas paracompletas, como as intuicionistas e as lógicas polivalentes, em que não vale o princípio de terceiro excluído.

Como já dissemos, não é possível estabelecer com rigor absoluto uma distinção entre lógicas não-clássicas e lógicas clássicas. Por exemplo, alguns sistemas de lógica não-reflexiva e paraconsistentes podem, de certo ponto de vista, ser consideradas extensões da lógica clássica. Podemos também ter sistemas modais paraconsistentes e lógicas deônticas paraconsistentes. Também podemos pensar em lógicas epistêmicas polivalentes. Efetivamente, isto torna um levantamento e classificação destes sistemas algo extremamente difícil e penoso, além de relativizar a classificação que fizemos acima. De qualquer modo, a classificação acima, como já notamos, tem caráter meramente didático, visando situar o leitor no quadro destes sistemas lógicos. O seguinte esquema permite visualizar alguns destes sistemas dedutivos:

- LÓGICAS
  - CLÁSSICAS
    - silogística aristotélica
    - cálculos proposicionais clássicos
    - cálculos de predicados clássicos
    - cálculos de predicados de n ordem (teoria de tipos)
    - Teorias dos conjuntos
  - NÃO-CLÁSSICAS
    - ortodoxas (ampliativas)
      - lógicas modais aléticas
      - lógicas modais deônticas
      - lógicas cronológicas
      - lógicas epistêmicas
    - heterodoxas (divergentes)
      - lógicas polivalentes
      - lógicas intuicionistas
      - logicas paraconsistentes
      - lógicas não-reflexivas
      - lógicas relevantes
      - lógicas fuzzy

Nosso esquema acima não envolve tudo o que se tem feito em lógica presentemente. Representa, na verdade, mais uma caricatura do que propriamente um retrato do estado atual dos sistemas não-clássicos. Em certa acepção, por exemplo, a silogística aristotélica pode ser vista como um apendíce do cálculo de predicados de primeira ordem. Além disso, muitos sistemas lógicos não-clássicos postos como ortodoxos, possuem sua contraparte heterodoxa. De mais a mais, sistemas aqui admitidos como heterodoxos, podem ser encarados como extensões dedutivas da lógica clássica. De fato, o problema e por demais complexo para ser equacionado de modo rigoroso e completo em poucas linhas.

No quadro das lógicas heterodoxas destacam-se em particular os sistemas paraconsistentes, idealizados pelo lógico russo N. Vasiliev, e levadas a cabo pelo lógico brasileiro Newton da Costa. Estes sistemas lógicos foram concebidos para servir de base para teorias inconsistentes e não-triviais, em outras palavras, teorias contraditórias, mas não super-completas. Assim, uma teoria T, tendo ℓ como lógica subjacente, diz-se inconsistente se possuir teoremas contraditórios, isto é, um dos quais é a negação do outro; em caso contrario, T diz-se consistente. A teoria T é trivial (ou super-completa) se todas as fórmulas de sua linguagem forem teoremas de T; se isto não ocorre, então T é não-trivial. T é paraconsistente[39] se for inconsistente mas não-trivial. Uma lógica é paraconsistente se for uma lógica subjacente de teorias paraconsistentes. Em sistemas paraconsistentes há semânticas que admitem

[39]Termo cunhado pelo filósofo peruano M. Quesada para designar os sistemas lógicos desenvolvidos por da Costa.

que uma sentença e sua negação sejam ambas verdadeiras, o que viola uma das ideias pétrias da lógica aristotélica tradicional. O mais interessante sobre os sistemas paraconsistentes consiste em suas aplicações, tanto teóricas quanto práticas, entre elas, o desenvolvimento de teorias paraconsistentes de conjuntos, em que se admitem, p.ex., a existência de conjunto de Russell; a formalização da teoria dos objetos de Meinong, e da lógica dialética em alguma acepção. Recentemente tem se aplicado a lógica paraconsistente na robótica, inclusive com a construção de rôbos paraconsistentes.

Outros sistemas heterodoxos que merecem destaque são as lógicas não-reflexivas nas quais o princípio de identidade não é válido em geral, dado que se admite que que a relação de identidade carace de significado para certos tipos de objetos. Este princípio possui diversas formulações, dentre elas algumas são as seguintes: (1) Toda proposição implica a si mesma, em símbolos $\alpha \rightarrow \alpha$ (nas palavras de Russell: *Once true, always true; once false, always false*). (2) Toda proposição é equivalente a si mesma, em símbolos: $\alpha \leftrightarrow \alpha$. (3) Todo objeto é identico a si mesmo: $\forall x(x = x)$. Dentre as lógicas não-reflexivas vale apena citar as lógicas de Schrödinger. Diversos físicos contemporâneos ligados a construção da Mecânica quântica insistiram na ideia que a noção de identidade não possui sentido para as entidades do mundo quântico, entre eles Schrödinger, Heisemberg e N. Bohr. Assim nasceram as lógicas de Schrödinger que visam sobretudo o tratamento rigoroso do discurso da física quântica padrão. Outro sistema não-reflexivo é a lógica da implicação causal, que revoga as duas primeiras formulações da lei da identidade. Nestas lógicas se $\alpha \rightarrow \beta$ exprime que "α causa β", então não se tem $\alpha \rightarrow \alpha$. A implicação causal, de grande importancia para as ciências empíricas, não satisfaz a lei reflexiva da identidade e, em consequência, também não admite que $\alpha \leftrightarrow \alpha$. De um ponto de vista filosófico, é comum admitir que o princípio de identidade tenha algum valor para os objetos macroscópicos, porém mesmo neste caso o princípio pode estar sujeito a revisões, especialmente quando consideramos que tais objetos se modificam ao longo do tempo, fato já intuido por Heráclito que teria afirmado que jamais poderíamos nos banhar duas vezes no mesmo rio, dado que nem nós, nem o rio seríamos os mesmos após um certo período de tempo. Para este filósofo pré-socrático o mundo está em constante transformação, o que exigiria no mínimo uma espécie de identidade transtemporal.

Afim de concluirmos estas notas fazemos referência as lógicas paracompletas. As lógicas paracompletas são sistemas lógicos que derrogam o princípio de terceiro excluído. Nestes sistemas de lógica ou em teorias fundamentadas em tais lógicas, podemos ter proposições que nem elas nem suas negações sejam verdadeiras. Dois exemplos de lógicas paracompletas são as lógicas polivalentes de Łukasiewicz, e a lógica intuicionista de L.E. J. Brower e A. Heyting. Jean Łukasiewicz (1922) construiu sistemas de lógicas polivalentes afim de investigar proposições modais e as noções de possibilidade e necessidade intimamente conectadas a tais proposições. Efetivamente, questões relacionadas já haviam sido aventadas por Aristóteles em seu *Da Interpretação*, onde discute o problema da verdade de proposições sobre o futuro, por exemplo, a célebre proposição “Amanhã haverá uma batalha naval”. Esta proposição, de acordo com uma lógica bivalente, ou é verdadeira ou é falsa, não havendo uma terceira possibilidade. De qualquer modo, se ela for verdadeira ou falsa, o futuro estará previamente determinado e, portanto, vivemos num mundo determinístico, caso seja possível estabelecer um terceiro valor, como *indeterminado*, então o futuro é contingente e, por conseguinte, a referida proposição não é nem verdadeira, nem falsa. Naturalmente esta questão envolve intrincadas questões metafísicas, que não pretendemos discutir aqui. Por outro lado, ela demonstrar que o princípio de terceiro excluído de sistemas clássicos não é auto-evidente.

A lógica intuicionista desenvolveu-se originalmente a partir da filosofia da matemática, particularmente de questões relacionadas a legitimidade de demonstrações não-construtivas em matemática. Para matemáticos como Leopold Kronecker e Henri Poincaré, dentre outros, a matemática não pode ser reduzida à teoria dos conjuntos, tal como proposto por G. Cantor. Kronecker, em particular, defendia que a noção de número natural deveria ser entendida como a categoria mais fundamental da matemática, o que ficou patenteado em sua célebre afirmação de que Deus nos deu os números naturais e todo o resto seria obra do homem. Também Poincaré, na mesma linha, considerava a indução matemática, um dos axiomas da aritmética de Peano, como a intuição básica da matemática, sobre a qual essa disciplina deveria ser eregida.

Em 1912, o matemático holandês L.E.J. Brower, em seu trabalho de doutoramento, acabou apresentando os fundamentos do intuicionismo, que desenvolveu nos anos subsequentes. Em síntese, a tese broweriana consiste em negar a matemática clássica e a possibilidade de se realizar provas por *redução ao absurdo*. Assim, na matemática usual, quando pretendemos provar que existe um objeto x que tem certa propriedade P, o que escrevemos $\exists x P(x)$, via de regra partimos da suposição da não existência, ou seja, assumimos a negação $\neg\exists x P(x)$. A partir dessa hipótese, em com recursos da teoria na qual estamos trabalhando (seus postulados), derivamos duas proposições contraditórias, digamos α e $\neg\alpha$. Conforme os cânones da lógica clássica, isso nos permite derivar uma contradição na teoria, isto é, algo como $(\neg\alpha \wedge \alpha)$. Dado que supõe-se que nenhuma proposição verdadeira possa implicar uma contradição, descarta-se nossa hipótese como falsa e, consequentemente, a proposição original, que pretendíamos provar, é admitida como verdadeira.

Para Brower este tipo de demonstração não pode ser aceita. Para ele, ao provarmos a falsidade da hipótese $\neg\alpha$, acabamos provando que $\neg\neg\alpha$ é verdadeira, mas não que α é verdadeira, ou seja, não é lícito para os intuicionistas o princípio clássico da dupla negação, a sabe: $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$. A razão da negativa da dupla negação como prova de que $\neg\neg\alpha$ fornece uma prova para α está no fato de termos de admitir que em todos os casos há uma prova de α ou de $\neg\alpha$. A hipótese de que não chegamos a uma prova de $\neg\alpha$, somos obrigados a reconhecer que α, recai no princípio de terceiro excluído, ou seja, $(\alpha \vee \neg\alpha)$, o que também não é admitido pelos intuicionistas. Para Brower, a matemática era uma atividade essencialmente mental e o formalismo da lógica e matemática seriam decorrentes dessa atividade. Assim, para ele, o que há em matemática é aquilo que pode ser 'construido' pela inteligência humana a partir de certas intuições fundamentais, como por exemplo, a intuição da unidade, ou seja, temos a intuição do que seja *um* objeto, e a partir disso, reiteradamente, construímos a ideia de dois, três ou quatro objetos e assim por diante. Não dispomos porém da intuição de uma totalidade infinita. O infinito, para Brower e os intuicionistas, só existe em *potência*, já que podemos construir tantos objetos quanto desejarmos, mas numca uma totalidade infinita deles, como pretendeu G. Cantor.

A lógica intuicionista, em sua formulação primeira, constitui realização do matemático russo A. Kolmogorov (1925), que pretendeu dar conta formalmente das ideias de Brower. Depois de Kolmogorov, tem especial destaque na lógica intuicionista Arend Heyting, que propôs seu sistema em um artigo de 1930.

Acabamos de expor de modo extremamente sumário apenas alguns das lógicas ditas heterodoxas ou rivais da clássica. Existem numerosos sistemas não-clássicos. De qualquer forma, vale apena observar que a lógica em nosso tempo revela-se um campo de estudo extremamente fecundo que envolve perguntas filosóficas de extraordinária significação, entre as quais as seguintes: qual a relação entre racionalidade e lógica? Quais as relações entre lógica e matemática? Entre a lógica e as ciências empíricas? A lógica em seu estado atual compromete-nos com alguma postura metafísica? Qual o status epistemológico da lógica no quadro da ciência presentemente? Naturalmente estas e outras questões são de interesse tanto de lógicos quanto de filósofos. Sistemas heterodoxos de lógica podem encontrar as mais diversas aplicações na filosofoia, como de fato vem ocorrendo. O que realmente pretendemos aqui deixar patente é o fato de a lógica no seu estado presente de desenvolvimento apresentar múltiplas dimensões e aplicações, o que não pode ser negligenciado pelo filósofo atento aos desenvolvimentos da ciência, e que pretenda contribuir seriamente para o progresso do conhecimento.

5 Considerações filosóficas

Algumas das conquistas mais notáveis da filosofia em nosso tempo, dependem de um bom conhecimento da lógica matemática, particularmente de setores de alta complexidade técnica desta disciplina. Lamentavelmente, muitos estudantes, e mesmo professores de filosofia, tem pouca ou nenhuma bagagem em lógica, o que os tem impossibilitado de compreender em todo seu alcance e profundidade muitas das realizações filosóficas que dependem das ciências formais, particularmente, em filosofia da ciência, filosofia da matemática e teoria do conhecimento, conformando-se com a análise de autores do passado filosófico, especialmente naqueles temas fortemente relacionados a filosofia da ciência ou teoria do conhecimento. De fato, mesmo áreas como a ética e a metafísica, tem hoje necessidade das poderosas ferramentas da lógica. Por exemplo, os desenvolvimentos em lógica deôntica, não podem ser negligenciados por qualquer pesquisador que tenha interesse no tratamento rigoroso de questões da Ética e Filosofia do Direito. Também as implicações metafísicas derivadas de certas interpretações da Física Quântica requerem profundo conhecimento de lógica quântica e outros sistemas de lógica não-clássica.

As vantagens do conhecimento da lógica matemática para o filósofo são gigantescas, e seu arcenal de ferramentas possui inúmeras aplicações. Ao filósofo que pretenda alguma incursão séria e contemporânea em certas áreas, como a teoria do conhecimento, a filosofia da ciência, a filosofia da matemática, a filosofia da física ou da biologia, a ética, a filosofia do direito e a metafísica, deve ter um conhecimento razoável da lógica atual, caso contrário deverá se limitar a exegêse de autores do passado e, por que não dizer, por vezes a uma produção bastante restrita e anacrônica, sem grande relevância para a pesquisa filosófica de nossos dias, em particular nas áreas por nós aventadas. Naturalmente, existem áreas da filosofia que não envolvem conhecimento significativo da lógica atual, nestas áreas, ainda não atingidas pelo formalismo da lógica contemporânea, comparecem a análise informal e a crítica de ideias, mas sem o devido rigor e precisão que a lógica disponibiliza.

De mais a mais, segundo nosso ponto de vista, os recursos oriundos da lógica moderna permitem uma distinção, ainda que não completamente precisa, entre o que podemos denominar filosofia científica e filosofia especulativa. (cf. da Costa [10]) A primeira marcada, entre outras coisas, pela precisão das linguagens formais, a segunda, usualmente assentada na vaguidade das linguagens naturais.

Além disso, a lógica é hoje um poderoso instrumento matemático de análise do discurso matemático e científico. É um instrumento de cálculo formal, algorítmo, que procura investigar, entre outras coisas, o que é a demonstrabilidade. Teoria da demonstração, teoria de modelos, teoria da computabilidade, teoria de conjuntos e fundamentos da matemática, são alguns dos ramos de investigação da lógica no presente. Mesmo a análise de teorias filosóficas mais tradicionais podem receber um tratamento formal. Ao filósofo que não tenha familiaridade com as conquistas da lógica matemática, resta, em muitos casos, tão somente divagar sem bússola no mar sem fim da especulação.

Referências

[1] BACHELARD, G. *La Philosophie du Non: essai d'une philosophie du nouvel esprit scientifique.* Paris, Presses Univ. de France, 1966.

[2] BAZHANOV, V.A. *Imaginary Geometry of N.I. Łobachevsky and Imaginary Logic of N.A. Vasiliev.* In: Modern Logic, **v.4**, p.148-156, 1994.

[3] BENACERRAF, P. & PUTNAM, H. *Philosophy of Mathematics: selected readings.* 2nd. ed., New York, Cambridge Un. Press, 1996.

[4] BEZIAU, J-Y. *De la logique formelle a la logique abstrate.* Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, v.**14**, p.41-50, 1994.

[5] BEZIAU, J-Y. *La Logique abstraute au sein de la mathématique moderne.* Ruch Filozofyczne, v.**6**, 1994.

[6] BLANCHÉ, R. *História da Lógica de Aristóteles a Bertrand Russell.* Lisboa, Edições 70, 1985.

[7] BOOLE, G. *An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities.* in google books, 1854.

[8] BOOLE, G. *The Mathematical Analysis of Logic: being an enssay towards a calculus of deductive reasoning.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009.

[9] CANTOR, G. *Contributions to the Fouding of the Theory of Transfinite Numbers.* New York, Dover, 1955.

[10] da COSTA, N.C.A. *Ensaio Sobre os Fundamentos da Lógica.* São Paulo, Hucitec, 1980.

[11] da COSTA, N.C.A. *Abstract Logics.* Pré-Publicação do Departamento de Filosofia da Univ. Federal de Santa Catarina, 2005.

[12] DAUBEN, J.W. *Georg Cantor: his mathematics and philosophy of the infinite.* Princeton Univ. Press, 1990.

[13] FRAENKEL, A. A. *Abstract Set Theory.* Netherlands, North-Holland, 1953.

[14] GOLDBLATT, R. *Topoi: the categorial analysis of Logic*, Mineola, Dover, 2006.

[15] GONSETH, F. *La Logique en tant que physique de l'objet quelconque.* in Actes du Congrès international de philosophie scientifique, Paris, Hermann, 1936.

[16] HAACK, S. *Filosofia das Lógicas*, São Paulo, Unesp, 2002.

[17] HALMOS, P. *Algebraic Logic.* Chelsea Pu. Co., 1962.

[18] HATCHER, W. S. *The Logical Foundations of Mathematics.* Oxford, Pergamon Press, 1982.

[19] HEIJENOORTH, *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic.* Harvard Univ. PRess, 1967.

[20] HILBERT, D. *Mathematical Problems.* In: *Bulletin of the American Mathematical Society*, **37**, 2000, p. 407-36.

[21] KLEENE, S.C. *Introduction to Metamathematics* Amsterdam: North-Holland, 1952.

[22] KANT, I. *Crítica da Razão Pura*, São Paulo, Nova Cultura, 1996.

[23] KRAUSE, Décio. *Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência.* São Paulo, EPU, 2002.

[24] KNEEBONE, G. T. *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics: an introductory survey.* New York, Dover Publications, 2001.

[25] MENDELSON, Elliot. *Introduction to Mathematical Logic.* New York, Van Nostrand Reinhold Company, 1964.

[26] MIRAGLIA, Francisco. *Cálculo Proposicional: uma interpretação da álgebra e da lógica.* Campinas, Unicamp, 1987.

[27] OLIVEIRA, G. M. *Racionalidade Científica, Paraconsistência e Quase-Verdade.* Florianópolis, Dissertação de Mestrado, 2008.

[28] OLIVEIRA, G. M. *Notas em Lógica e Racionalidade Científica.* In: Tabule: Revista de Philosophia, n.**5**, p. 61-82, 2011.

[29] OLIVEIRA, A. J. Franco de. *O Advento da Matemática não-standard.* in: Monografias da Soc. Paran. Mat. **8**, 1990.

[30] RESTALL, G. *Logical Pluralism and the Preservation of Warrants.* in. Rahman *et al.* (eds.), *Logic, Epistemology, and the Unity of Science.*

[31] QUINE, W.O. *O Sentido da Nova Lógica.* 2ed, Curitiba, Ed.Ufpr, 1996.

[32] SANT'ANNA, A.S. *O que é um axioma*, Barueri, Manoele,

[33] SUPPES, P. *Introduction to Logic.* New York, Dover, 1999.

[34] TILES, M. *The Philosophy of Set Theory: an historical introduction to Cantor's paradise.* New York, Dover, 2004.

[35] WEINGARTNER, P.(Ed.) *Alternative Logics: Do science need them.* Berlin, Springer-Verlag, 2003.

[36] WEYL, H. *The Continuum: a critical examination of the foudation of analysis.* New York, Dover, 1994.